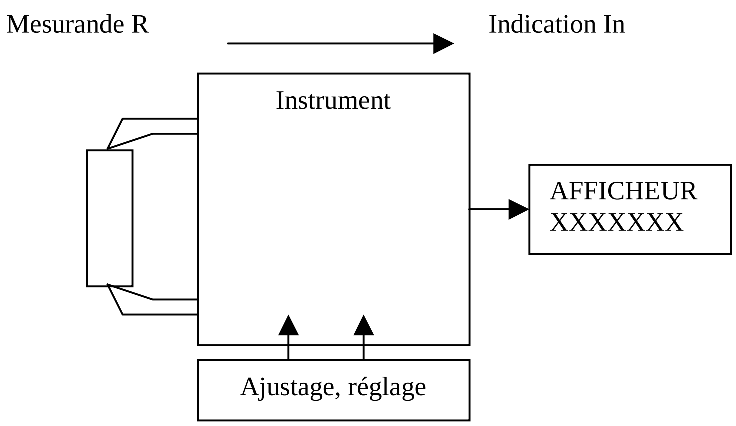
MESURES ET STATISTIQUES

Une résistance est branchée aux bornes d'un ohmmètre. L'appareil affiche un nombre. Quelle est la relation entre ce nombre et la valeur de la résistance ?
On tentera de répondre à cette question en utilisant des résultats expérimentaux et un langage accessible à des élèves de première.
On utilise un multimètre multiplexeur Agilent 34970A. Cet appareil peut afficher un nombre de 6 ½ digits (1 999 999), il peut enregistrer les mesures effectuées et les communiquer à un ordinateur.

On utilise la fonction "ohmmètre 4 fils" disponible sur l'instrument : cette fonction permet d'éliminer de la mesure la résistance des conducteurs qui relient la résistance à l'instrument *(voir annexe).*

<u>Représentation de la chaîne d'instrumentation</u> :



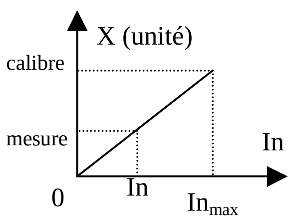
Il faut évaluer la valeur de la grandeur physique R, que l'on appelle le mesurande.
Le mesurande est la grandeur d'entrée du système.
La grandeur de sortie est un nombre : l'indication de l'appareil.

L'opération de **mesurage** consiste à évaluer la valeur du **mesurande**.

Il faut d'abord remarquer que l'indication de l'appareil est, au départ, un nombre **sans unité.** La machine affiche le résultat de telle sorte que X(mesure) = (1 unité) *In (In du type 85.4552).

Cela signifie qu'avant d'être utilisée, la machine a été réglée (opérations d'ajustage, de réglage).
Cette opération est effectuée par le constructeur de l'appareil et doit être renouvelée périodiquement.
Elle peut être aussi réalisée par l'opérateur lors de chaque utilisation comme sur les pH-mètres et les spectrophotomètres (citons aussi le réglage "du zéro" des teslamètres, des pinces ampèremétriques…).

Les opérations de réglage seront détaillées plus loin : leur objectif est d'obtenir une relation X(In) du type X = (1 unité)*In.



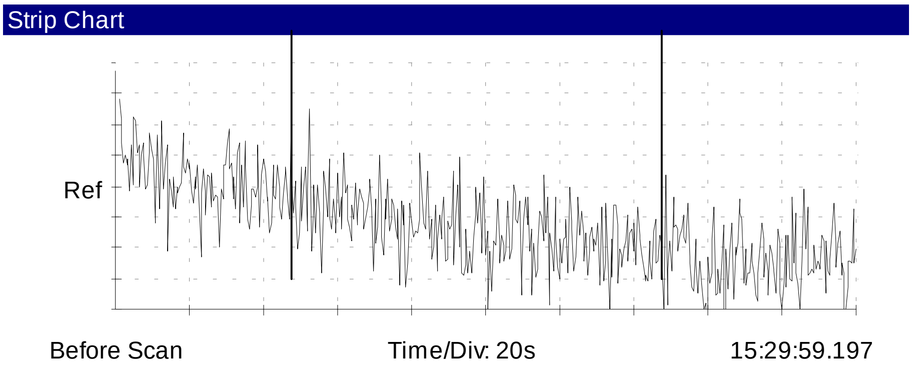
Ainsi, en lisant In, l'on obtient directement une valeur de la mesure X.
Pour l'instant nous supposerons que cette fonction est "parfaite" c'est à dire que le comportement de l'instrument correspond à ce modèle.

<u>Expérience</u> :
On branche à l'entrée de l'instrument une résistance de 82,50 Ω à 0,1 % (méthode 4 fils). Il ne s'agit pas d'une résistance "étalon" : ce type de résistance est choisi pour sa stabilité.

L'appareil est configuré en ohmmètre 4 fils, calibre 100 Ω, résolution 6 ½ digits.

Il affiche une indication du type 82.5574 le dernier chiffre étant instable.

Pour en savoir plus l'on enregistre 500 mesures (une mesure toutes les 100 ms) et l'on obtient :



	Channel Name	Units/Div	Reference	Marker:1	Marker:2
1	<105>	200.0 uOhm	82.55785 Ohm	On	On
2					

Time/Div	20s	y2:(105)	82.55737 Ohm	t2:(105)	15:29:06.764
		y1:(105)	82.55791 Ohm	t1:(105)	15:27:26.764
		Delta y	538.0000 uOhm	Delta t	01:40min

L'appareil mesure toujours la même résistance R et l'on constate que les indications successives de cette grandeur sont différentes. Remarquer que le programme affiche directement le résultat de la mesure en Ohm en utilisant la relation vue plus haut : il s'agit pourtant de l'enregistrement d'un certain nombre d'indications. Deux curseurs ont été positionnés sur la courbe et les valeurs correspondantes y_1 et y_2 sont affichées : elles sont voisines de 82,55 Ω et elles sont très proches : leur différence "delta y" est de 538 **µΩ**.

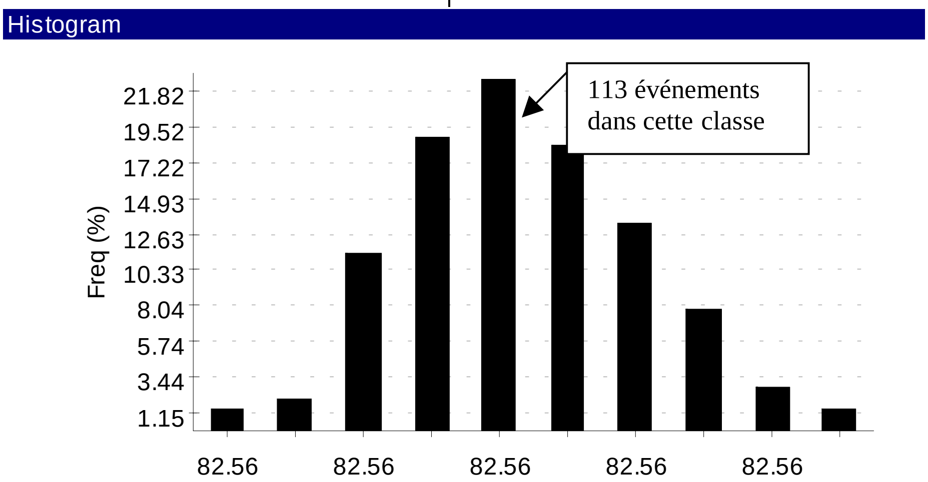
Ce type de représentation ne permet pas de donner simplement le résultat de la mesure.

L'histogramme et l'expression du résultat d'une série d'observations.

Cette représentation considère l'ensemble des indications In de la valeur de R effectuées depuis le début de la saisie.

Elle divise l'intervalle (In_{MAX} - In_{MIN}) en 10 "classes" (intervalles) affichées sur l'axe des x.

Elle compte le nombre d'indications relevées dans chaque classe et affiche le résultat sur l'axe y (barre verticale).



Channe	(105)	Min:	82.55682 Ohm	Mean:	82.55759 Ohm
		Max:	82.55842 Ohm	Std. dev:	280.7754 uOhm
		Readings	500	Out of range:	0

Sur l'axe y est affichée la fréquence des indications In (en %).

<u>**Exemple**</u> : le programme a compté 113 indications dans la classe repérée sur la courbe. Le nombre de mesures total est de 500. La fréquence des indications dans cette classe est (113/500)*100 = 22,6%

On constate que les indications se répartissent de façon différente dans les diverses classes.

La valeur **la plus probable** d'une indication appartient à la classe qui correspond à la barre la "plus haute".

Le programme a calculé la valeur moyenne des 500 mesures (mean) : elle est de 82,55759 Ω.et elle appartient à la classe la plus probable.

Si l'on veut représenter l'ensemble de ces résultats par *un seul nombre*, on utilise la valeur moyenne, calculée, de l'ensemble des indications.

Si l'on représente l'ensemble des indications par un seul nombre, l'on perd beaucoup d'informations : la dispersion des indications autour de la valeur moyenne n'apparaît plus.

Le programme affiche aussi "l'écart type σ" de l'ensemble des indications (Standard deviation : Std Dev). Cette grandeur permet de représenter la dispersion des indications autour de la valeur moyenne.

68% des indications appartiennent à l'intervalle qui s'étend de (**valeur moyenne-σ**) à (**valeur moyenne+σ**).

95% des indications appartiennent à l'intervalle qui s'étend de (**valeur moyenne-2σ**) à (**valeur moyenne+2σ**).

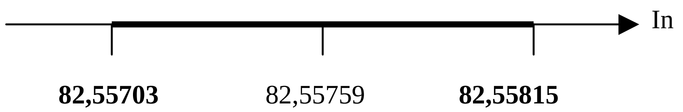
* Cette probabilité est de 99,7% si l'on encadre la valeur moyenne avec un intervalle de 3σ.

Ainsi, l'on extrait de l'histogramme la valeur moyenne de l'indication et son écart-type : ces grandeurs vont permettre d'exprimer le résultat de la série de mesures sous une forme plus "compacte".
Dans la suite nous ne considèrerons que les valeurs de l'indication In (sans unité).

L'ensemble des indications est représenté de la façon suivante :
$In = In_{moyen}$ +/- σ = (82,55759 +/- 0,00028). Cela signifie que derrière le code In se cache non pas un nombre mais un ensemble de nombres compris entre In_{min} =(82,55759 – 0,00028) = **82,55731** et In_{max} = (82,55759 + 0,00028) = **82,55787.** Cela signifie aussi qu'une lecture quelconque de l'indication à 68 chances sur 100 d'appartenir à cet intervalle (taux de confiance de 68%).

Le demi-intervalle σ est appelé **l'incertitude-type** de l'indication.
L'intervalle (In_{max}-In_{min}) est appelé l'intervalle de confiance de l'indication.
Le taux de confiance de cet intervalle est de 68%.

Un taux de confiance de 68% est souvent insuffisant. On préfère utiliser **une incertitude élargie** de 2σ. On considère alors que :
$In = In_{moyen}$ +/- 2σ = (82,55759 +/- 0,00056). Cela signifie que derrière le code In se cache un ensemble de nombres compris entre (82,55759 – 0,00056) = **82,55703** et (82,55759 + 0,00056) = **82,55815.** Cela signifie aussi qu'une indication de l'appareil, prise au hasard, a 95% de chances d'appartenir à cet intervalle.



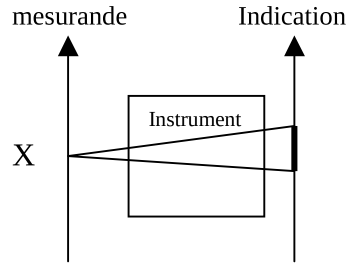
Valeur moyenne In_{moyen}

Incertitude élargie :
2σ = 0,00056
Taux de confiance : 95%

Remarquer que la troisième décimale étant incertaine, la quatrième doit être "arrondie" : il est préférable d'écrire que 82,5570 < In < 82,5581 avec In_{moyen} = 82,5576.

Première conclusion :

L'indication d'un instrument de mesure est une grandeur de nature statistique : elle est incertaine et ne peut être représentée que par un intervalle de confiance, associé à un taux de confiance.

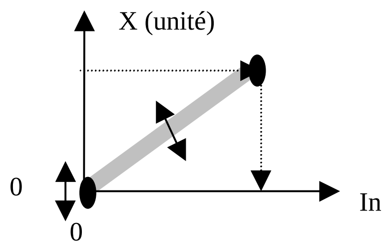


Même si la valeur X du mesurande est constante, l'instrument de mesure en donne une image "floue" (incertaine).
Un "point" à l'entrée du système donne une "tache" à la sortie.

Remarques :
On retrouve un phénomène analogue en optique : l'image d'un point lumineux (source ponctuelle) n'est jamais un "point" mais toujours une "tache" (défauts des lentilles, diffraction…).
Avec les appareils de mesure numériques ce phénomène est lié aux propriétés des circuits du conditionneur de signal mais aussi aux propriétés du Convertisseur Analogique Numérique (sans parler des bruits de toute nature pouvant "polluer" le signal, depuis l'entrée jusqu'à la sortie du système).
La résolution de notre instrument est programmable : on la règle à 4 ½ digits (19 999) et l'appareil affiche 88.55. Cette valeur affichée est stable : en fait, on utilise un filtre passe-bas… Les fluctuations ne se "voient" plus, mais elles sont toujours là ! **L'indication d'un instrument est toujours incertaine.**

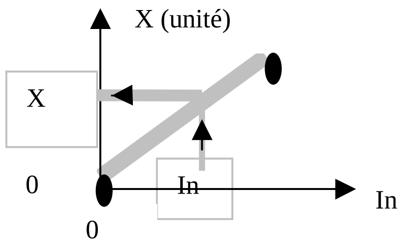
L'estimation du résultat d'une mesure :
A partir de l'indication In de l'instrument, l'on calcule le résultat de la mesure en utilisant une fonction du type X (mesure) = (1 unité) * In.
Revenons sur cette fonction et sur le réglage de l'instrument.
Les instruments de mesure sont construits de telle sorte que la fonction X(In) soit de la forme
X = a*In + b.
Tous ces appareils sont équipés d'un réglage de "a" (pente) et d'un réglage de "b" (zéro, décalage ou offset) (même si ces réglages ne sont pas directement accessibles à l'utilisateur).
Avant d'être utilisés, tous les instruments doivent être réglés.
Imaginons que l'on effectue le réglage de notre appareil (calibre 100 Ω et résolution de 6 ½ digits).

Il faut disposer de deux résistances "étalons" aussi précises que possible : par exemple R_0 = 0,0000… Ω et R = 90,0000…Ω. Ces grandeurs sont définies avec un intervalle de confiance associé à un taux de confiance : **quelle que soit leur qualité, elles sont incertaines.**
On branche la résistance R_0 et l'on règle "b" pour que l'indication In = 0.00000.
On branche ensuite R et l'on règle "a" pour que l'indication soit In = 90.0000
Ces deux indications sont incertaines.



Pour chaque réglage, la valeur de la résistance étalon et celle de l'indication sont incertaines.
Ces réglages ne conduisent pas à des "points" mais à des "taches".
La fonction X(In) est peut être proche de l'idéal
X = (1 unité)*In mais elle est incertaine ("floue").

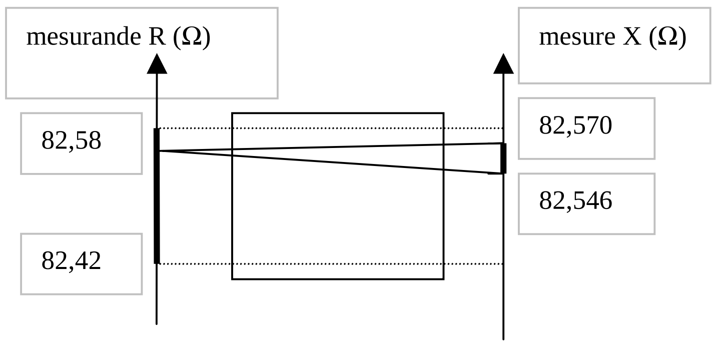
<u>Remarque</u> :
Cette fonction peut être précisée en effectuant un étalonnage de l'instrument : on branche une série de résistances étalons à l'entrée de l'instrument, on relève chaque fois son indication et l'on modélise le nuage de points.
Pour estimer le résultat d'une mesure, l'on utilise cette fonction dans "l'autre sens" : on lit l'indication In (incertaine) et l'on en déduit une estimation X de la mesure.



On estime que X = (1 unité)*In.
Mais l'indication In est incertaine, la fonction X(In) aussi : la mesure X est donc elle aussi incertaine.
L'évaluation de l'incertitude ΔX de la mesure X résulte de la composition des différentes sources d'incertitude.
L'estimation de ΔX utilise des méthodes statistiques qui ne seront pas abordées ici.

Le constructeur de l'appareil **doit** indiquer comment l'on calcule l'incertitude de la mesure à partir de l'indication de l'instrument. Il **doit** aussi indiquer le taux de confiance attaché à cet intervalle de confiance.

Pour notre instrument le constructeur garantit que ΔX = 0,004%*calibre +0,01%*In avec un taux de confiance de 99,7 % (incertitude élargie à 3σ).
Si l'on reprend les données enregistrées l'on a :
In_{moyen} = 82,55759 ; calibre 100 Ω → X = 82,55759 Ω
ΔX = 4* 10^{-5} *10^{2} + 10^{-4} * 82,55759 = 0,01225 Ω (on conserve le nombre de chiffres affichés).
Le résultat de la mesure est donc X = (82,55759 +/- 0,0122) Ω.
La deuxième décimale étant incertaine, le résultat est X = (82,558 +/- 0,012) Ω.
L'intervalle de confiance s'étend de 82,546 à 82,570 Ω avec un taux de confiance de 99,7%.
Les mesures ont été effectuées sur une résistance de 82,50 Ω "à 0,1 %".
Cela signifie que l'incertitude relative ΔR/R = 0,1 % (l'incertitude absolue ΔR est de 0,1 Ω si la résistance vaut 100 Ω).
Ici ΔR = 10^{-3} *82,50 = 0,08 Ω et l'intervalle de confiance s'étend de 82,42 à 82,58 Ω avec un taux de confiance qui n'est pas précisé dans la documentation du constructeur. Dans la communauté Européenne, il semble qu'il soit d'usage d'utiliser une incertitude élargie à 2σ. Il existe des normes mais elles ne sont pas contraignantes (la plupart des constructeurs s'y réfèrent). Nous continuerons donc en supposant que le taux de confiance de l'intervalle de confiance de la résistance mesurée est de 95%.
Nous sommes donc dans la situation suivante :



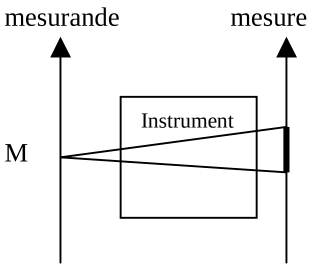
La valeur du mesurande appartient à l'intervalle [82,42-82,58] Ω avec un taux de confiance de 95%.
L'instrument nous dit que la mesure appartient à l'intervalle [82,546-82,570] Ω avec un taux de confiance de 99,7 %. Ces résultats son cohérents. L'instrument permet de mieux définir la valeur de la résistance, il est plus précis que les indications du constructeur de la résistance. La résistance utilisée n'a pas une précision suffisante pour étalonner cet appareil.

<u>Deuxième conclusion</u> :

Pour exprimer le résultat d'une mesure, l'indication de l'instrument **ne suffit pas**. Il est absolument nécessaire de préciser **l'incertitude de la mesure**, c'est à dire **un intervalle de confiance** dont le **taux de confiance** est indiqué.

Rappelons le texte de la norme NFC 42670 :
Un résultat sans tolérance est donné à titre indicatif. Seules les valeurs affectées de tolérance ou de limites constituent des valeurs garanties.

Les qualités d'un instrument de mesure :

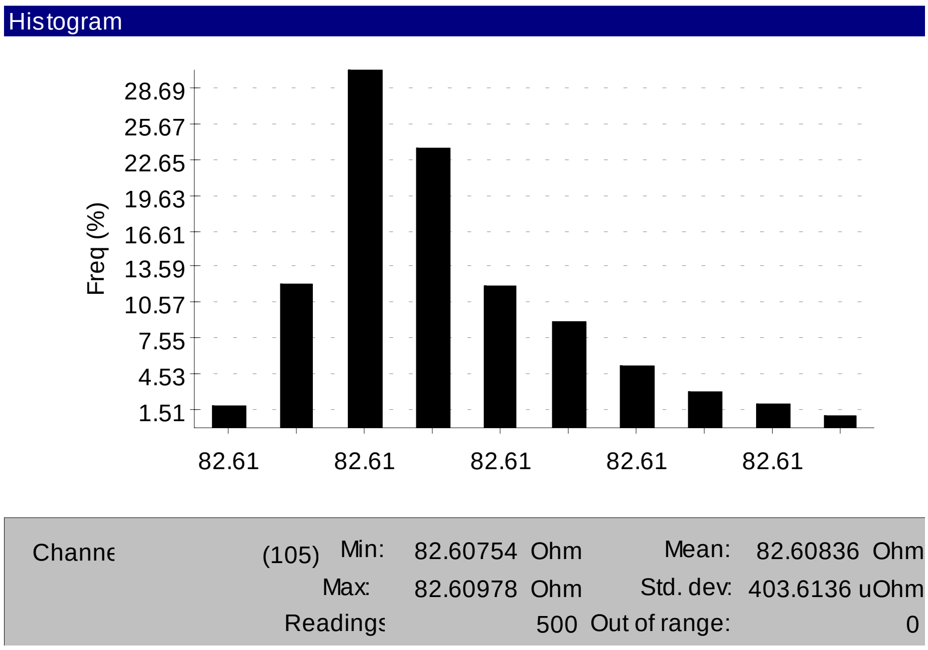


Un mesurande M est présenté à l'entrée de l'instrument. Celui-ci donne un résultat de mesure X +/- ΔX, c'est à dire un intervalle de confiance du résultat (avec un taux de confiance précisé).
Il est essentiel que le mesurande M appartienne à l'intervalle de confiance : dans ces conditions l'appareil est **juste**.

Si l'appareil est **juste** alors l'on peut parler de sa **précision** : l'instrument est d'autant plus précis que l'intervalle de confiance est plus petit pour un taux de confiance donné.

Résumons sous une forme "imagée" :
Le résultat d'une mesure n'est pas un nombre unique ("un point") mais un intervalle de nombres ("une tache"). Plus la "tache" est petite et plus la mesure est précise… à condition que "la tache" soit au "bon endroit" !
Cela signifie que tous les appareils de mesure **doivent** être contrôlés périodiquement. Pour les appareils de précision cette opération **doit** être conduite par une entreprise spécialisée, raccordée à des étalons nationaux ou internationaux.
Pour des appareils "courants" nous verrons plus loin comment l'on peut procéder à leur contrôle dans nos laboratoires.
Avant cela, changeons un peu de sujet : nous allons voir comment une technique de mesure mal choisie, peut conduire à des mesures "non-justes".

La notion d'erreur systématique :
Depuis le début notre instrument est configuré en ohmmètre "4 fils", cette technique élimine du résultat de la mesure la résistance des conducteurs utilisés pour relier la résistance à l'appareil.
Recommençons la même expérience avec le même instrument configuré en ohmmètre "2 fils" (ohmmètre standard) (voir annexe). On obtient l'histogramme suivant (résolution 6 ½ digits) :



En utilisant la même méthode que plus haut, nous pouvons dire que l'ensemble des indications peut être représenté par In = (82,60836 +/- 0,00081) avec un taux de confiance de 95 %.
En utilisant la documentation du constructeur, comme plus haut, on obtient comme résultat de la mesure : X = (82,60836 +/- 0,0122) Ω = (82,608 +/- 0,012) Ω.
L'intervalle de confiance s'étend de 82,592 à 82,621 Ω avec un taux de confiance de 99,5 %.

Le constructeur de la résistance garantit que sa valeur R est comprise entre 82,42 et 82,58 Ω avec un taux de confiance de 95 %.

*Aucune des mesures probables n'appartient à l'intervalle de confiance défini par le constructeur de la résistance : **dans ces conditions l'on dira que l'instrument n'est pas juste.***

Les indications de l'instrument sont **systématiquement** trop grandes d'environ 0,1 Ω ce qui correspond à la résistance "parasite" des fils de liaison. Cette erreur, qui affecte toutes les mesures, et appelée **une erreur systématique.**
Dans tous les cas l'erreur systématique peut être estimée, et le résultat de la mesure peut être corrigé.

Troisième conclusion :

Avant toute mesure, il faut s'assurer que la méthode utilisée n'introduit pas **d'erreur systématique**. Sinon, il faut évaluer cette erreur et la corriger ou changer de méthode.

Remarque : la résistance des fils de liaison est "petite", elle devient négligeable si la résistance à mesurer est "grande" (beaucoup plus grande que la résistance des fils,... à apprécier en fonction de la précision souhaitée).

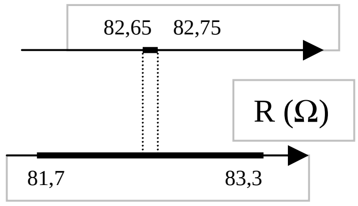
Mesurer une grandeur physique est, vraiment, une opération complexe : la notion de grandeur d'influence.

Expérience :
On reprend la configuration de notre instrument en ohmmètre "4 fils", calibre 100 Ω et résolution 6 ½ digits et l'on branche une autre résistance de précision, prise dans la même série de fabrication, à l'entrée de l'instrument.
A la température ambiante, l'indication moyenne de l'appareil est 82,571 2. La mesure est donc
R = (82,571 +/- 0,012) Ω.
On approche alors un fer à souder "chaud" (environ 300 °C) de la résistance. L'indication de l'instrument évolue et se stabilise pour donner une mesure
R = (82,565 +/- 0,012) Ω
On éloigne alors le fer à souder et la mesure revient, au bout d'une certaine durée, à sa valeur initiale.
La température du composant a donc une influence sur sa résistance : c'est une **grandeur d'influence** du mesurande. Une mesure de haute précision impose donc de repérer les grandeurs d'influence du mesurande, de les contrôler, et de préciser leur valeur.
Nos élèves de STL PLPI ont l'habitude d'utiliser ce phénomène avec des sondes "Pt100" utilisées comme capteurs de température.

Comment contrôler la justesse des appareils du laboratoire :
Pour contrôler un instrument de mesure, il faut disposer de mesurandes M +/-ΔM "étalons" : ils doivent être beaucoup plus précis que l'instrument à contrôler (et aussi stables que possible).
Les "calibrateurs" :
Ce sont des instruments de haute précision permettant de générer des mesurandes servant d'étalons de contrôle et de réglage du parc d'instruments du laboratoire. Citons les calibrateurs de température, de pression et de signaux électriques (U, I, R). Un seul calibrateur de chaque type suffit : ils doivent être raccordés à des étalons nationaux périodiquement, par une entreprise spécialisée. Il est essentiel que leur fonctionnement soit garanti.
Les balances de précision doivent être contrôlées tous les ans par une entreprise spécialisée.
Les calibrateurs sont utilisés par les élèves lorsqu'ils effectuent le réglage de transmetteurs. Le contrôle et le réglage des instruments est effectué par le personnel du laboratoire.
Si l'on ne dispose pas de calibrateurs, l'on peut effectuer un contrôle des instruments "standards" en utilisant un instrument beaucoup plus précis que l'instrument à contrôler. Un seul exemplaire de cet instrument suffit et lui aussi doit être contrôlé régulièrement.

Exemple :
On veut contrôler un multimètre MX22 fonctionnant en ohmmètre "2 fils" .
L'incertitude annoncée est ΔX = 0,5%*lecture + 4 UR(digits) (taux de confiance 95%).
On dispose d'un Agilent 34970A configuré en ohmmètre "2 fils" : il mesure la valeur d'une résistance **et** celle des fils de liaison.
Résultat R =
(82,700 +/-0,048) Ω (taux de confiance 99,7 %).
Avec le MX22 (même résistance **et** mêmes fils) on obtient R = 82,5 Ω
$\Delta R = 5*10^{-3}*82{,}5 + 0{,}4 = 0{,}81\ \Omega = 0{,}8\ \Omega \rightarrow X = (82{,}5 \pm 0{,}8)\ \Omega$

Le MX22 est juste.

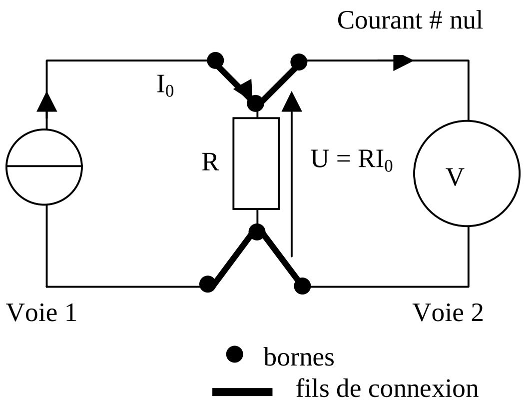


Conclusion : un peu de bon sens
Le résultat d'une mesure est une grandeur complexe de nature statistique : nos élèves doivent en être conscients. Mais il ne faut pas les accabler de calculs fastidieux. Le premier objectif est de les amener à porter un jugement critique sur l'indication d'un instrument.
On peut les inviter à effectuer des contrôles simples de leurs instruments de mesure. Il faut qu'ils se demandent, pour chaque mesure, quelle "confiance" ils peuvent accorder au résultat : mais il ne s'agit pas de contrôler systématiquement les instruments.
Il n'est pas évident de maintenir un parc d'instruments "dans ses normes". Une méthode simple consiste à "dégrader" la précision des instruments pour la ramener à 1 %. Les appareils sont contrôlés par les élèves avec cette norme. A partir de là, on considère que les mesures sont obtenues "à 1%" avec un taux de confiance raisonnable…

Prolongements :
Souvent nos élèves utilisent des résultats de mesures pour effectuer des calculs. Quel est l'intervalle de confiance et le taux de confiance du résultat (entre autres conséquences : quel est le nombre de chiffres significatifs que l'on doit retenir dans l'expression du résultat ?) ? La solution "rigoureuse" passe par des calculs statistiques trop complexes pour nos élèves. On peut effectuer un traitement statistique (il existe des logiciels dédiés) sur les résultats de plusieurs groupes travaillant dans les mêmes conditions. Il y a de plus en plus de publications sur ce sujet.

ANNEXE 1

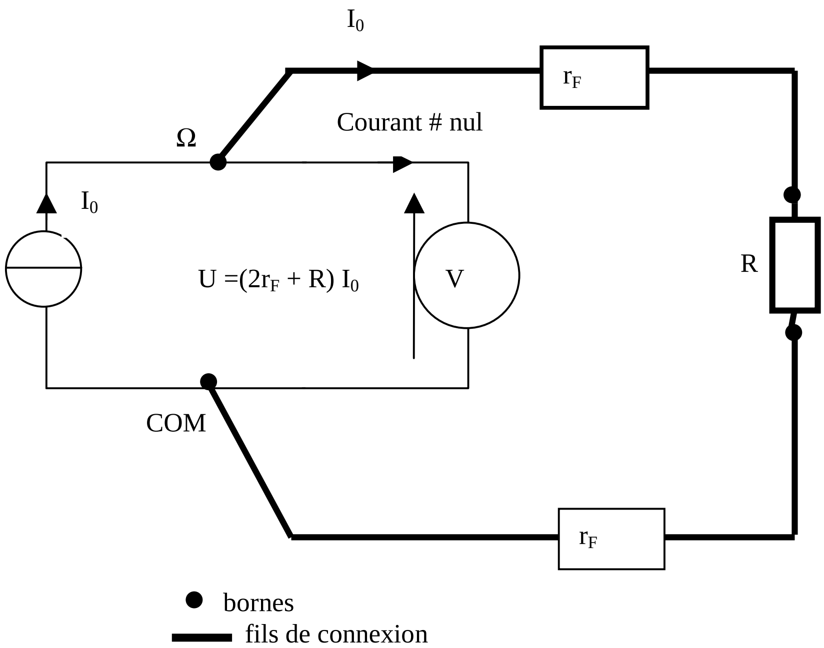
Principe d'un ohmmètre "4 fils".



L'instrument utilise deux circuits et 4 bornes :
La voie 1 est une source de courant I_0 (la valeur de I_0 est "connue" par la machine) branchée aux bornes de la résistance (2 fils).
La voie 2 est un voltmètre branché directement aux bornes de R (2 autres fils).
La machine mesure $U = RI_0$ et calcule $R = U/ I_0$.
Cette méthode permet d'éliminer de la mesure la résistance des fils de connexion (représentés avec un trait gras).

ANNEXE 2

Mesure d'une résistance avec une méthode "2 fils" (standard).



Il y a seulement deux bornes de connexion.
La source de courant est branchée (à l'intérieur de l'instrument) directement aux bornes du voltmètre. Celui ci mesure la tension aux bornes de la résistance R en série avec les fils de liaison de résistance r_F.

Avec ce montage, la tension $U = (2r_F + R) I_0$ mesurée par le voltmètre ne dépend pas que de la valeur de la résistance R à mesurer. Elle dépend aussi de la résistance r_F de chaque fil de liaison (supposés identiques).

Jean-Louis VIDAL
Lycée Les Catalins
MONTELIMAR